UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2024 - 2025
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Algèbre - L2 Informatique

Série Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Préciser celles qui sont des endomorphismes et celles qui sont des forme linéaires.

1. $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z, t) \mapsto (x - 1446z + t + 2025, x - 2y + z + 2t)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (xy, x - y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - 2y)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x - y, y, x + y + 5z)$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto x + 1446y - z$

Exercice 2. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, 2x + y - 5z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer Ker(f) et la dimension de Ker(f).
3. En déduire que f n'est pas injective.

Exercice 3.

Considérons l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\; (x, y, z) \mapsto (x - y - z, y - z - x, z - 2x + 2y)$

1. Montrer que g est un endomorphisme.
2. Déterminer Ker(g) et une base de Ker(g).
3. g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En déduire la dimension de Im(g).
5. Déterminer Im(g) et montrer que Ker(g) et Im(g) sont supplémentaires.

Exercice 4. Soients $f : \mathbb{R}^{1918} \to \mathbb{R}^{1914}$ et $g : \mathbb{R}^{1939} \to \mathbb{R}^{1945}$ deux applications linéaires.

1. Montrer que f est non injective.
2. Montrer que g est non surjective.

Exercice 5. Montrer que les données suivantes définissent une unique application linéaire que l'on déterminera :

1. $\Phi(1,1,1) = (1,2,5)$; $\Phi(-1,1,1) = (1,0,-1)$; $\Phi(-1,1,-1) = (0,1,2)$
2. $\Psi(1,2,1) = 4$; $\Psi(0,1,1) = -2$; $\Psi(0,-1,2) = 3$

Exercice 6.

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y,z) \mapsto (x-y, x+y, x-y+3z)$.

1. Montrer que Ψ est endomorphisme.
2. Déterminer $Ker(\Psi)$.
3. En déduire que Ψ est un automorphisme.
4. Déterminer les applications Ψ^{-1} et $\Psi \circ \Psi$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$. On pose

$$E_+ = \{X \in E : f(X) = X\} \text{ et } E_- = \{X \in E : f(X) = -X\}$$

1. Montrer que E_- et E_+ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $E_- \cap E_+$.
3. Si de plus on admet que $f^2 = Id_E$, alors montrer que $E = E_- \oplus E_+$.